

УДК 532.5

## КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ПОДВОДНОГО ЦИЛИНДРА В КАНАЛЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

*А.М. Елизаров, К.В. Кириллин, С.И. Филиппов*

### Аннотация

Исследуется обтекание подводного кругового цилиндра установившимся, ограниченным снизу потоком идеальной жидкости с учетом силы тяжести и поверхностного натяжения на свободной границе. Проведены систематические расчеты коэффициентов подъемной силы и волнового сопротивления, а также определены формы свободной поверхности в зависимости от числа Фруда при различных числах Вебера и разных значениях циркуляции.

**Ключевые слова:** капиллярно-гравитационные волны, обтекание цилиндра, ограниченный поток.

---

### Введение

Задача обтекания подводного кругового цилиндра в ограниченном снизу потоке несжимаемой жидкости относится к классическим задачам гидромеханики. Первые ее решения были получены Л.Н. Сретенским [1] для модели диполя и М.Д. Хаскиндом [2], применившим метод Н.Е. Кочина. Современные подходы к исследованию данной задачи связаны в основном с уточнением выполнения граничных условий. Обзор работ по этой теме можно найти, например, в [3, 4].

Влияние силы поверхностного натяжения на свободной границе также изучалось многими авторами, но в случае, когда исследуемые потоки не содержали обтекаемых тел. В [5] нами начато исследование обтекания подводного цилиндра с образованием капиллярно-гравитационных волн для течения бесконечно глубокой жидкости. В настоящей работе в рамках линейной теории волн малой амплитуды при точном выполнении граничных условий на контуре и дне канала изучается циркуляционный поток конечной глубины.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho$ , в котором находится круговой цилиндр  $C$  радиуса  $a$ . Пусть этот поток имеет свободную поверхность и ограничен снизу горизонтальным дном, находящимся на глубине  $H$ . Центр цилиндра расположен на глубине  $h$ ,  $h + a < H$ . В системе координат (рис. 1), связанной с контуром, течение плоскопараллельное, установившееся и потенциальное. Скорость потока на бесконечности равна  $U_0$ .

Согласно закону Лапласа, известному из физики, увеличение давления при пересечении поверхности жидкости пропорционально средней кривизне этой поверхности, то есть

$$p - p_0 = \alpha/R, \quad (1)$$

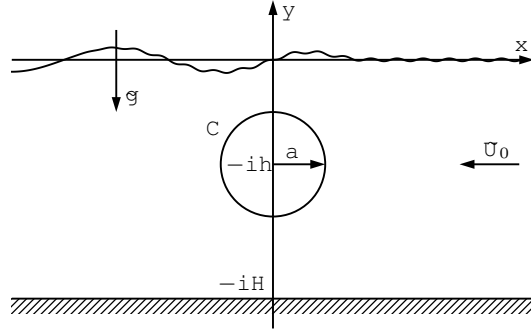


Рис. 1. Схема течения

где  $p$  – давление внутри жидкости,  $p_0$  – постоянное атмосферное давление,  $R$  – главный радиус кривизны поверхности,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения, величина которого зависит от температуры и физических свойств жидкости. Для волн малой амплитуды выражение в правой части (1) равно  $-\alpha d^2\eta/dx^2$ , где  $\eta = \eta(x)$  – возвышение свободной поверхности над горизонтальным уровнем.

Требуется найти форму образующейся свободной поверхности и рассчитать коэффициенты волнового сопротивления и подъемной силы цилиндра.

## 2. Краевая задача для потенциала возмущенных скоростей

Из интеграла Бернулли и условия, что частица жидкости, принадлежащая ее поверхности, остается все время движения на этой поверхности, получим следующие граничные условия для потенциала  $\varphi = \varphi(x, y)$  возмущенных скоростей:

$$U_0 \frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \eta = \frac{U_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\alpha}{\rho g} \frac{d^2 \eta}{dx^2}. \quad (2)$$

Введем комплексный потенциал  $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  возмущенного течения, где  $\psi(x, y)$  – функция тока, гармонически сопряженная к потенциалу  $\varphi(x, y)$ . Тогда из условий (2), как показано в [1], можно получить соотношения

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\alpha}{\rho g} \frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{dW}{dz} - iW \right) = 0, \quad y = 0, \quad (3)$$

где  $\operatorname{Re}$  – обозначение вещественной части комплексной величины. На границе  $C$  цилиндра выполняется условие

$$\operatorname{Im} W(z) = U_0 y + \psi_0 \quad (\psi_0 = \text{const}), \quad z \in C, \quad (4)$$

где  $\operatorname{Im}$  – обозначение мнимой части комплексной величины. На дне канала

$$\operatorname{Im} (dW/dz) = 0 \quad (y = -H). \quad (5)$$

Представим  $W(z)$  в виде суммы  $W(z) = W^*(z) + W_\gamma(z)$ , где  $W^*(z)$  – комплексный потенциал возмущенного бесциркуляционного течения, удовлетворяющий условиям (3)–(5). Потенциал  $W_\gamma(z)$  чисто циркуляционного течения наряду с условиями (3) и (5) удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im} W_\gamma(z) = \psi_1 \quad (\psi_1 = \text{const}), \quad z \in C; \quad \Delta_C W_\gamma(z) = \Gamma, \quad (6)$$

где  $\Delta_C$  – приращение функции при положительном обходе  $C$ ,  $\Gamma$  – значение циркуляции.

Кроме того, должны выполняться условия на бесконечности, обеспечивающие ограниченность скоростей возмущений вне окрестности  $C$ , и условие излучения волн. Последнее будем задавать в соответствии с практическими наблюдениями, согласно которым более длинные волны, в образовании которых главную роль играет весомость, развиваются за телом, а более короткие волны, связанные преимущественно с капиллярностью, распространяются вверх по течению [1].

### 3. Моделирование поверхности раздела сред распределенными диполями

Для решения поставленной задачи применим метод моделирования поверхностей раздела особенностями (диполями), предложенный в [6] и развитый для многосвязных областей в [4]: будем отыскивать комплексный потенциал бесциркуляционного течения в виде

$$W^*(z) = W_\infty(z) + \sum_{k=1}^2 [V_k(z) + \phi_k(z)], \quad (7)$$

$$W_\infty(z) = -\frac{a^2 U_0}{z + ih}, \quad V_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1(t) dt}{z - t}, \quad V_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_2(t) dt}{z - t + iH},$$

$$\phi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_k} \frac{\mu_k(\zeta_k) d\zeta_k}{z - \zeta_k}, \quad \zeta_k = -ih + \frac{a^2}{t_k + i(-1)^k h_k}, \quad k = 1, 2,$$

где  $h_1 = h$ ,  $h_2 = H - h$ ,  $\mu_k = \mu_k(t)$  – неизвестные плотности распределения диполей на свободной поверхности ( $k = 1$ ) и дне ( $k = 2$ ), контуры  $L_1$  и  $L_2$  получены инверсией линий  $y = 0$  и  $y = -H$  относительно окружности  $C$ , а интегрирование по  $L_k$  проведено в отрицательном направлении. Представление потенциала в форме (7) позволяет точно удовлетворить условию (4) на контуре.

Плотности  $\mu_k$  распределенных особенностей определяются из краевых условий на свободной поверхности и дне. Подставив комплексный потенциал (7) в (3), получим

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2 V_1}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{dV_1}{dz} - iV_1 + \frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2 \Omega(z)}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{d\Omega(z)}{dz} - i\Omega(z) \right]_{z=x-i0} = 0, \quad (8)$$

где  $\Omega(z) = V_2(z) + \phi_1(z) + \phi_2(z) + W_\infty(z)$ . Уравнение (8) при  $z = x$  равносильно следующему:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2 V_1}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{dV_1}{dz} - iV_1 - \frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2 \overline{\Omega(z)}}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{d\overline{\Omega(z)}}{dz} + i\overline{\Omega(z)} \right] = 0$$

(здесь черта обозначает комплексное сопряжение). Поскольку под знаком действительной части стоит функция, аналитическая в полуплоскости  $y \leq 0$ , то эта функция есть чисто мнимая постоянная, которую, не нарушая общности, можно положить равной нулю. Значит,

$$\frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2 V_1}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{dV_1}{dz} - iV_1 - (A\overline{\Omega})(z) = 0, \quad (9)$$

где оператор  $A$  определен соотношением

$$(Af)(z) = \left( \frac{i\alpha}{\rho g} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{U_0^2}{g} \frac{d}{dz} - i \right) [f(z)].$$

Рассмотрим (9) как дифференциальное уравнение относительно  $V_1(z)$ . Общее решение этого уравнения можно получить методом вариации постоянных:

$$V_1(z) = c_1(z) \exp(s_1 z) + c_2(z) \exp(s_2 z), \quad s_k = -\frac{i\rho U_0^2}{2\alpha} [1 - (-1)^k s_0],$$

$$c_k(z) = (-1)^{k+1} \frac{g}{s_0 U_0^2} \int e^{-s_k z} (A\bar{\Omega})(z) dz, \quad k = 1, 2; \quad s_0 = \sqrt{1 - 4\alpha g / (\rho U_0^4)}.$$

Необходимо определить пределы интегрирования у неопределенных интегралов в формулах для  $c_k(z)$ . Для этого нужно использовать принятые нами условия излучения волн. Параметр  $s_1$  относится к волнам, в образовании которых основную роль играет капиллярность, поэтому в формуле для  $c_1(z)$  нижний предел интегрирования возьмем равным  $-\infty$ , а верхний – равным  $z$ . Параметр  $s_2$  характеризует волны, в образовании которых основную роль играет сила тяжести, поэтому в формуле для  $c_2(z)$  следует взять нижний предел интегрирования равным  $\infty$ , а верхний – равным  $z$ . Таким образом,

$$V_1(z) = \frac{g}{s_0 U_0^2} e^{s_1 z} \int_{-\infty}^z e^{-s_1 \lambda} (A\bar{\Omega})(\lambda) d\lambda - \frac{g}{s_0 U_0^2} e^{s_2 z} \int_{\infty}^z e^{-s_2 \lambda} (A\bar{\Omega})(\lambda) d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} V_1(z) = & \frac{g}{s_0 U_0^2} \left\{ e^{s_1 z} \int_{-\infty}^z e^{-s_1 \lambda} I(\lambda) d\lambda - e^{s_2 z} \int_{\infty}^z e^{-s_2 \lambda} I(\lambda) d\lambda + \right. \\ & + \frac{e^{s_1 z}}{2\pi i} \oint_{L_1} \left[ \int_{-\infty}^z e^{-s_1 \lambda} D_1(\lambda, \bar{\zeta}_1) d\lambda \right] \mu_1(\zeta_1) d\bar{\zeta}_1 - \\ & - \frac{e^{s_2 z}}{2\pi i} \oint_{L_1} \left[ \int_{\infty}^z e^{-s_2 \lambda} D_1(\lambda, \bar{\zeta}_1) d\lambda \right] \mu_1(\zeta_1) d\bar{\zeta}_1 + \\ & + \frac{e^{s_1 z}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^z e^{-s_1 \lambda} D_3(\lambda, t) d\lambda \right] \mu_2(t) dt - \frac{e^{s_2 z}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^z e^{-s_2 \lambda} D_3(\lambda, t) d\lambda \right] \mu_2(t) dt + \\ & + \frac{e^{s_1 z}}{2\pi i} \oint_{L_2} \left[ \int_{-\infty}^z e^{-s_1 \lambda} D_2(\lambda, \bar{\zeta}_2) d\lambda \right] \mu_2(\zeta_2) d\bar{\zeta}_2 - \\ & - \frac{e^{s_2 z}}{2\pi i} \oint_{L_2} \left[ \int_{-\infty}^z e^{-s_2 \lambda} D_2(\lambda, \bar{\zeta}_2) d\lambda \right] \mu_2(\zeta_2) d\bar{\zeta}_2 \left. \right\}, \quad (10) \\ I(\lambda) = & -\frac{2i\alpha a^2 U_0}{\rho g(\lambda - ih)^3} + \frac{a^2 U_0^3}{g(\lambda - ih)^2} + \frac{ia^2 U_0}{\lambda - ih}, \end{aligned}$$

$$D_k(\lambda, \bar{\zeta}_k) = -\frac{2i\alpha}{\rho g(\lambda - \bar{\zeta}_k)^3} + \frac{U_0^2}{g(\lambda - \bar{\zeta}_k)^2} + \frac{i}{\lambda - \bar{\zeta}_k}, \quad k = 1, 2;$$

$$D_3(\lambda, t) = \frac{2i\alpha}{\rho g(\lambda - t - iH)^3} + \frac{U_0^2}{g(\lambda - t - iH)^2} + \frac{i}{\lambda - t - iH}.$$

Найдя действительную часть (10) в пределе при  $z \rightarrow x - i \cdot 0$  с учетом ранее введенного представления для  $V_1(z)$  (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), выделив действительную часть полученного выражения и применив интегрирование по частям, имеем:

$$\mu_1(x) = \sigma_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, t) \mu_1(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x, t) \mu_2(t) dt, \quad (11)$$

$$\sigma_1(x) = \frac{2ga}{s_0 U_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{ia\alpha(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g(x + ih)} + E(\bar{s}_1) e^{\bar{s}_1 x} \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\bar{s}_1 \lambda}}{\lambda + ih} d\lambda - E(\bar{s}_2) e^{\bar{s}_2 x} \int_{\infty}^x \frac{e^{-\bar{s}_2 \lambda}}{\lambda + ih} d\lambda \right],$$

$$K_1(x, t_1) = -\frac{g}{\pi s_0 U_0^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{i\alpha}{\rho g} (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) H_1(x, t) + \right. \\ \left. + E(\bar{s}_1) e^{\bar{s}_1 x} \int_{-\infty}^x e^{-\bar{s}_1 \lambda} H_1(\lambda, t) d\lambda - E(\bar{s}_2) e^{\bar{s}_2 x} \int_{\infty}^x e^{-\bar{s}_2 \lambda} H_1(\lambda, t) d\lambda \right],$$

$$K_4(x, t) = -\frac{g}{\pi s_0 U_0^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{i\alpha}{\rho g} (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) H_2(x, t) + \frac{i\alpha(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g(x - t + iH)} + \right. \\ \left. + E(\bar{s}_1) e^{\bar{s}_1 x} \int_{-\infty}^x e^{-\bar{s}_1 \lambda} (\lambda - t + iH)^{-1} d\lambda - \right. \\ \left. - E(\bar{s}_2) e^{\bar{s}_2 x} \int_{\infty}^x e^{-\bar{s}_2 \lambda} (\lambda - t + iH)^{-1} d\lambda + \right. \\ \left. + E(\bar{s}_1) e^{\bar{s}_1 x} \int_{-\infty}^x e^{-\bar{s}_1 \lambda} H_2(\lambda, t) d\lambda - E(\bar{s}_2) e^{\bar{s}_2 x} \int_{\infty}^x e^{-\bar{s}_2 \lambda} H_2(\lambda, t) d\lambda \right],$$

$$H_k(\lambda, t_k) = \frac{a^2}{(t_k - ih)^2 [\lambda - \zeta_k(t_k)]}, \quad E(\bar{s}_k) = -i - \frac{U_0^2}{g} \bar{s}_k + \frac{i\alpha \bar{s}_k^2}{\rho g}, \quad k = 1, 2.$$

При приведении (11) к безразмерному виду выделим числа Фруда  $\operatorname{Fr} = U_0/\sqrt{ga}$  и Вебера  $\operatorname{We}_g = \alpha/(g\rho a^2)$ .

Из краевого условия на дне после преобразования системы координат  $z \mapsto z + H$  найдем второе уравнение для определения  $\mu_k$ :

$$\mu_2(x) = \sigma_2(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x, t) \mu_2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_3(x, t) \mu_1(t) dt, \quad (12)$$

$$K_2(x, t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{a^2}{(t + ih_1)^2 s_3(x, t)} \right],$$

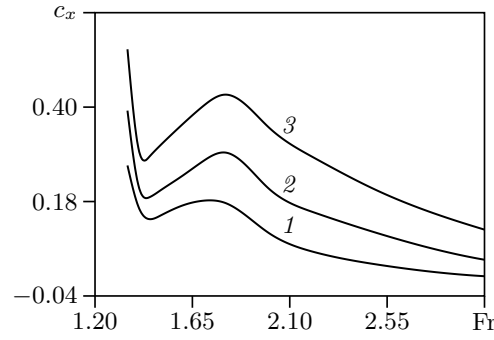


Рис. 2. Зависимость коэффициента волнового сопротивления от числа Фруда при  $We_g = 0.824$ ,  $H/a = 12$ ,  $h/a = 4$  для  $\gamma = -0.5; 0; 0.5$  (кривые 1–3)

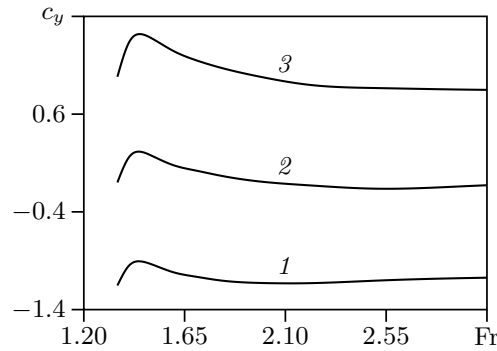


Рис. 3. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа Фруда при  $We_g = 0.824$ ,  $H/a = 12$ ,  $h/a = 4$  для  $\gamma = -0.5; 0; 0.5$  (кривые 1–3)

$$K_3(x, t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[ \frac{a^2}{(t + ih)^2 s_4(x, t)} + \frac{1}{x - t - iH} \right],$$

$$s_2(x, t) = x - ih_1 - a^2/(t + ih_1), \quad s_4(x, t) = x - ih_1 - a^2/(t - ih), \quad \sigma_2(x) = -2\operatorname{Re}[W_\infty(x)].$$

Для чисто циркуляционного течения комплексный потенциал  $W_\gamma(z)$  отыскивается в виде, аналогичном (7), где  $\mu_k$  нужно заменить на  $\mu_{\gamma k}$ , а  $W_\infty(z)$  – на

$$W_{\gamma\infty}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z + ih - a^2/(\bar{z}_1 - ih)}{z - z_\gamma}.$$

Здесь  $z$  – произвольная точка области  $y > 0$ . Тогда потенциал  $W_\gamma(z)$  удовлетворяет условиям (6), а из условий (3) и (5) можно получить вторую систему уравнений для определения  $\mu_{\gamma k}$ .

Решение систем интегральных уравнений (11), (12) осуществлялось численно методом последовательных приближений [4]. Разработанная на языке Фортран программа вычисления гидродинамических характеристик была протестирована для случая  $H = \infty$  – получены результаты, совпадающие с результатами [5].

На рис. 2–6 представлены примеры расчета коэффициентов  $c_x = 2X/(\rho a U_0^2)$  и  $c_y = 2Y/(\rho a U_0^2)$  волнового сопротивления и подъемной силы кругового цилиндра в зависимости от числа Фруда, а также формы образующихся волн при  $a = 0.003$  для канала конечной глубины. На рис. 2, 3 кривыми 1–3 представлены результаты расчетов гидродинамических характеристик цилиндра для различных значений

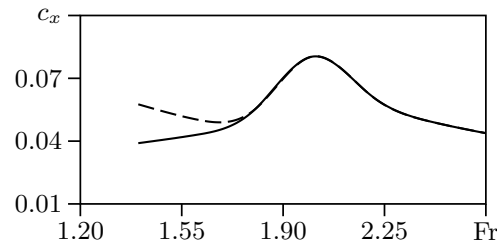


Рис. 4. Зависимость коэффициента волнового сопротивления от числа Фруда при  $h/a = 5$ ,  $H/a = 10$ ,  $\gamma = -0.5$  и температуре  $0^\circ\text{C}$  (сплошная кривая) и  $30^\circ\text{C}$  (штриховая кривая)

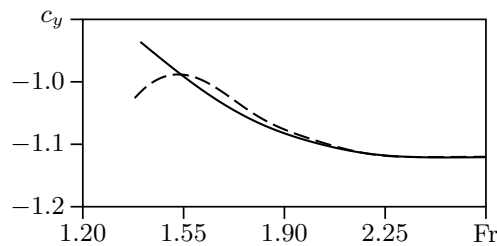


Рис. 5. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа Фруда при  $h/a = 5$ ,  $H/a = 10$ ,  $\gamma = -0.5$  и температуре  $0^\circ\text{C}$  (сплошная кривая) и  $30^\circ\text{C}$  (штриховая кривая)

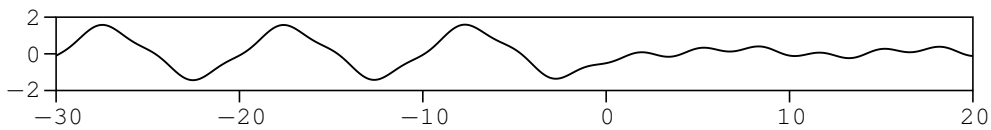


Рис. 6. Форма свободной поверхности при  $Fr = 1.45$ ,  $We_g = 0.824$ ,  $\gamma = -0.5$ ,  $H/a = 12$  и  $h/a = 4$

циркуляции  $\gamma = \Gamma/(aU_0) = -0.5; 0; 0.5$  при  $H/a = 12$ ,  $h/a = 4$ ,  $We_g = 0.824$ . Отметим, что для ограниченного снизу потока, в отличие от бесконечно глубокой жидкости [5], кривые  $c_x = c_x(Fr)$ ,  $c_y = c_y(Fr)$  имеют максимумы. Сплошная и штриховая кривые на рис. 4, 5 соответствуют разным числам Вебера  $We_g = 0.867$  и  $0.806$  при  $h/a = 5$ ,  $H/a = 10$ ,  $\gamma = -0.5$ . Это имеет место, например, для  $\alpha = 0.0757$ ;  $0.0712$ , то есть для коэффициентов поверхностного натяжения при температуре воды  $0^\circ\text{C}$  и  $30^\circ\text{C}$  [7]. Как видно из графиков, с увеличением числа Фруда влияние на гидродинамические характеристики температуры, следовательно, и поверхностного натяжения, быстро ослабевает.

Отметим, что в целом для данной задачи характерно наличие двух критических чисел Фруда [1], в интервале между которыми и проводились расчеты, поскольку только там образуются капиллярно-гравитационные волны. Пример расчета свободной поверхности  $\eta = \psi/U_0$  при  $Fr = 1.45$ ,  $We_g = 0.824$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $H/a = 12$  и  $h/a = 4$  представлен на рис. 6. Линейные размеры на этом рисунке отнесены к радиусу цилиндра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00163).

### Summary

*A.M. Elizarov, K.V. Kirillin, S.I. Filippov.* Capillary-Gravity Waves in the Circulation Flow around an Underwater Cylinder in a Finite Depth Channel.

In this article, we study an underwater circular cylinder in a steady-state ideal flow restricted from below taking into account gravity force and surface tension on the free boundary. We performed systematic calculations to determine the lift and wave drag coefficients as well as free surface shapes depending on the Froude number for different Weber numbers and circulation values.

**Key words:** capillary-gravity waves, flow around a cylinder, restricted flow.

### Литература

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
2. *Хаскинд М.Д.* О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // Прикл. мат. и мех. – 1945. – Т. 9, № 1. – С. 67–78.
3. *Стурова И.В.* Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5 / ВЦ СО АН СССР. – Красноярск, 1990. – 48 с.
4. *Филиппов С.И.* Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. – Казань: Изд-во Казан. матем. о-ва, 2004. – 200 с.
5. *Елизаров А.М., Спиридонов О.А., Филиппов С.И.* Обтекание подводного контура с образованием капиллярно-гравитационных волн // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2001. – № 2. – С. 15–17.
6. *Тумашев Г.Г., Черепенин Н.Д.* Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 140–151.
7. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.

Поступила в редакцию  
18.03.10

---

**Елизаров Александр Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, директор НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *elizarov@ksu.ru*

**Кириллин Кирилл Вадимович** – младший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *kirill@ksu.ru*

**Филиппов Сергей Иванович** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *sergei.filippov@ksu.ru*